

## سوالات ریاضیات گسسته

۱. در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس‌های زوج عددی ..... و تعداد رأس‌های فرد عددی ..... است.

- (۱) فرد - فرد (۲) فرد - زوج (۳) زوج - فرد (۴) زوج - زوج

پاسخ: گزینه‌ی «۴»: گراف مورد نظر دارای ۱۶ رأس است از طرفی می‌دانیم که تعداد رئوس درجه فرد یک گراف زوج است و در این جا تعداد کل رئوس عددی است زوج بنابراین تعداد رئوس درجه زوج نیز عددی است زوج. یعنی گزینه ۴ درست است.

۲. با سه رأس  $V = \{a, b, c\}$  چند گراف جهت دار می‌توان تشکیل داد که فقط یک طوقه داشته باشند؟

- (۱) ۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱۹۲ (۴) ۸۱

پاسخ: گزینه‌ی «۳»: ابتدا کل گراف‌های بدون طوقه را پیدا می‌کنیم.  $|N| = 2p^2 - p = 2 \cdot 3^2 - 3 = 64$   
این گراف‌ها یا در رأس  $a$  و یا در رأس  $b$  و یا در رأس  $c$  طوقه دارند. پس:  $64 \times 3 = 192$

۳. در یک گراف  $\delta = 3$  و  $p = 11$  است. در این گراف حداقل  $\sum_{i=1}^p \deg V_i$  چقدر است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۵

پاسخ: گزینه‌ی «۲» همان طور که در نکات آمد،  $\delta \leq \frac{2q}{p}$  بنابراین:

$$3 \leq \frac{2q}{11} \Rightarrow 2q \geq 33 \rightarrow 2q \geq 34 \rightarrow q \geq 17$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \geq 34$$

۴. اگر در یک گراف «۵- منتظم» از مرتبه‌ی  $p$  داشته باشیم  $q = 2p + 7$ ، این گراف چند رأس دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

همان طور که گفتیم در گراف  $2$ - منتظم از مرتبه‌ی  $p$  داریم، پس:  $q = \frac{rp}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{5}{2}p \\ q = 2p + 7 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{2}p = 2p + 7 \Rightarrow \frac{p}{2} = 7 \Rightarrow p = 14$$

۵. گرافی با ۶ رأس دارای ۱۴ یال است. درجه‌ی چند رأس از این گراف ۵ است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$q_6 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»: این گراف را با گراف  $K_6$  مقایسه می‌کنیم:

چون گراف داده شده یک یال از گراف کامل کمتر دارد، پس دو رأس از درجه Max خارج شده، در گراف  $K_6$  درجات تمام رؤوس ۵ می‌باشد و اگر یک یال را حذف کنیم دو رأس از درجه‌ی ۴ خواهد شد و بقیه‌ی رؤوس درجه ۵ می‌باشند.

$$(تعداد\ رؤوس\ درجه\ ۵ = ۴ - ۶)$$

۶. اگر  $G$  یک گراف ساده با  $p$  رأس و  $\bar{G}$  مکمل  $G$  باشد، کدام حکم درست است؟

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \quad (۲)$$

$$\Delta(G) + \Delta(\bar{G}) = p \quad (۱)$$

$$\delta(G) + \Delta(\bar{G}) = p \quad (۴)$$

$$\delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»: چون  $G, \bar{G}$  مکمل هستند پس متناظر یک رأس یا Max درجه از  $G$  یک رأس با Min درجه از  $\bar{G}$  می‌باشد و

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1$$

مجموع درجه‌های دو رأس متناظر در  $G$  و  $\bar{G}$  مساوی  $p - 1$  است. یعنی:

۷. اگر  $I_1, I_2, \dots, I_n$  بازه‌های باز ناتهی باشند به طوری که به ازای هر  $i \neq j$  که  $i \leq j$  و  $j \leq n$  داشته باشیم  $I_i \cap I_j = \Phi$  در این

صورت کدام درست است؟

(۱) گرافی وجود ندارد که این بازه‌ها رؤوس آن باشند.

(۲) در گراف این بازه‌ها تعداد رؤوس بیش‌تر از تعداد یال‌هاست.

(۳) گراف این بازه‌ها کامل است.

(۴) در گراف این بازه‌ها تعداد یال‌ها بیشتر از تعداد رؤوس است.

پاسخ: گزینه‌ی «۲»: گراف بازه‌ها گرافی می‌باشد که رأس‌هایش متناظر با بازه‌ها باشد و دو رأس در صورتی مجاور هستند که بازه‌های

مربوط به آن‌ها متمایز باشند و با اشتراک آنها تهی نباشد. در این تست چون  $I_i \cap I_j = \Phi$  پس هیچ دو رأسی مجاور نمی‌باشند و گراف بازه‌ها تهی است که شامل  $n$  رأس بوده و یال ندارد و گزینه‌ی ۲ درست است.

۸. کدام یک از احکام زیر درست است؟

(۱) هر گراف همیلتنی هم‌بند است.

(۲) هر گراف کامل از مرتبه بزرگتر از ۲ همیلتنی است.

(۳) در یک گراف همیلتنی درجه هیچ رأسی نمی‌تواند برابر ۱ باشد.

(۴) هر سه مورد فوق درست است.

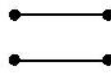
پاسخ: گزینه‌ی «۴»: گراف‌های کامل اگر از مرتبه بزرگتر از ۲ باشند آنگاه دارای دور همیلتنی هستند. در گراف همیلتنی چون در موقع دور

زدن وارد یک رأس می‌شویم و از همان رأس خارج می‌شویم پس حداقل درجه‌ی رأس ۲ است. [www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

۹. کدام نادرست است؟

- (۱) هر گراف که هم بند نباشد درخت نیست.  
 (۲) هر گراف که هم بند نباشد منتظم نیست.  
 (۳) هر گراف که هم بند نباشد اویلری نیست.  
 (۴) هیچ کدام

پاسخ : گزینه ی «۲»



گراف منتظم ممکن است هم بند نباشد مانند گراف که ۱- منتظم مرتبه ی ۴ بوده و ناهمبند است.

۱۰. در کدام گزینه ماتریس مجاورت نشان دهنده یک گراف منتظم است؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (۴) \text{ هیچکدام} & (۳) & (۲) & (۱) \end{matrix}$$

پاسخ : گزینه ی «۳» : در گزینه ی ۳، درجه ی تمامی رئوس ۲ است، پس گراف منتظم است.

تذکر: مجموع درایه های هر سطر (یا ستون) برابر درجه آن رأس است.

۱۱. حاصل عبارت  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  (که  $n \in \mathbb{N}$ ) کدام است؟

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (۲) \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad (۱)$$

$$n^3 = n \quad (۴) \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \quad (۳)$$

پاسخ : گزینه ی «۲»

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

در این نوع مسائل بهتر است با عدد گذاری به جای  $n$  گزینه صحیح را پیدا کنیم.

به ازای  $n=1$  گزینه ۳ و ۴ نادرست می شوند.

به ازای  $n=2$  گزینه ۱ نادرست می شود و در نتیجه گزینه ی ۲ صحیح است.

روش دوم: با توجه به فرمول

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad n \in \mathbb{N}$$

۱۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر همواره بر ۴ بخش پذیر است؟

- (۱) مجموعه دو عدد فرد (۲) مجموع دو زوج (۳) مجموع دو عدد فرد متوالی (۴) مجموع دو عدد زوج متوالی

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

گزینه‌ی ۱ نادرست است. مثال نقض  $1+9=10$

گزینه‌ی ۲ نادرست است. مثال نقض  $4+6=10$

گزینه‌ی ۴ نادرست است. مثال نقض  $2+4=6$

گزینه‌ی ۳ صحیح است. زیرا دو عدد فرد متوالی  $2k+1$  و  $2k+3$  است و

$$(2k+1)+(2k+3)=4k+4=4(k+1)=4q$$

۱۳. چند عدد سه رقمی مربع کامل وجود دارد؟

- ۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$10^2 \leq k^2 \leq 31^2 \Rightarrow 10 \leq k \leq 31 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها } 31-10+1=22$$

$$a=25b+17; 17 < b$$

۱۴. در تقسیم عدد  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  باقیمانده ۱۷ و خراج قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر  $a$  مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچکترین عدد

طبیعی  $a$  کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$a=6k \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow 25b+17 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow 1 \times b + 5 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow b+5 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow b \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow b=6k+1$$

$$b > 17 \rightarrow b_{\min} = 6 \times 3 + 1 = 19$$

$$\text{لذا: } a_{\min} = 19 \times 25 + 17 = 492$$

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

کاملاً مشخص است که رقم دهگان مورد نظر، ۹ می‌باشد.

۱۵. مجموع ارقام بزرگترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی مانده، توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\frac{a}{q^2} = \frac{47}{q} \Rightarrow a = 47q + q^2, |a| > 47, q^2 < 47 \Rightarrow 0 < q \leq 6$$

چون سمت راست مضرب q است پس باید a نیز مضرب q باشد.

$$a = q(47 + q) \Rightarrow kq = q(47 + q) \Rightarrow j = 47 + q$$

$$1 \leq q \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} q = 1, 2, \dots, 6 \\ k = 48, 50, \dots, 53 \end{cases} \longrightarrow a = kq = 52 \times 6 = 312 \Rightarrow 3 + 1 + 8 = 12$$

۱۶. در جلوی عدد  $50!$  چند صفر قرار دارد؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

به ازای هر ۲ و ۵ در تجزیه  $n!$ ، یک صفر جلوی  $n!$  قرار دارد و چون در  $n!$  توان ۲ از توان ۵ بیشتر است، پس کافی است توان ۵ را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} \text{توان } 5 \text{ در } 50! &= \left[ \frac{50}{5} \right] + \left[ \frac{10}{5} \right] \\ &= 10 + 2 = 12 \end{aligned}$$

در نتیجه ۱۲ تا صفر جلوی  $50!$  وجود دارد.

۱۷. کوچکترین مقدار n که به ازای آن  $n!$  بر  $219 \times 10^{16}$  بخش پذیر باشد کدام است؟

۸۰ (۴)

۷۰ (۳)

۲۱۹ (۲)

۷۳ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۱»: می‌خواهیم  $n!$  بر عدد  $219 \times 10^{16} = 73 \times 3 \times 2^{16} \times 5^{16}$  بخش پذیر باشد. با توجه به این که ۷۳ اول است. پس  $n!$  باید دست کم یک عامل ۷۳ داشته باشد. در نتیجه از  $73!$  شروع می‌کنیم که عامل ۷۳ دارد.

از طرفی در  $73!$  عامل ۳ نیز هست. پس کافی است توان ۲ و ۵ یعنی توان ۱۰ در  $n!$  حداقل ۱۶ باشد و چون توان ۱۰ با توان ۵ برابر است (در  $n!$  بنابراین کافی است توان ۵ حداقل ۱۶ باشد:

$$\text{توان } 5 = \left[ \frac{73}{5} \right] + \left[ \frac{14}{5} \right] = 14 + 2 = 16$$

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

پس  $73!$  کوچکترین عدد ممکن است و در نتیجه  $n = 73$  قابل قبول است.

۱۸. اگر  $A = (2122)_3$  باقیمانده‌ی تقسیم  $A$  بر  $10$  کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) صفر

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$A = (2122)_3 = 2 + 2(3) + 1(3)^2 + 2(3)^3 = 71$$

$$A \div 10 = 7 \text{ باقیمانده } 1$$

۱۹. به ازای کدام مقدار  $n$ ، مجموع ارقام عدد  $10^{2n} - 10^n$  برابر ۲۱۶ می‌شود؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$A = 10^{2n} - 10^n = 10^n (10^n - 1) = 10^n (99 \dots 99) = 999 \dots 99 \dots$$

$$\begin{aligned} & \text{مجموع ارقام } A = (9 + 9 + \dots + 9) + (0 + 0 + \dots + 0) = 2n \times 9 = 216 \Rightarrow n = \frac{216}{2 \times 9} = 12 \end{aligned}$$

۲۰. کدام معادله به ازای هیچ مقدار  $k$  جواب ندارد؟  $(x, y \in \mathbb{Z})$

۲)  $x^2 + y^2 = 4k + 3$

۱)  $x^2 + y^2 = 4k$

۴)  $x^2 + y^2 = 4k + 2$

۳)  $x^2 + y^2 = 4k + 1$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

هر عدد مربع کامل به صورت  $4k$  یا  $4k + 1$  می‌باشد. بنابراین سه حالت زیر را داریم:

۱)  $x^2 + y^2 = 4k + 4k' = 4(k + k') = 4k''$

۲)  $x^2 + y^2 = 4k + 4k' + 1 = 4(k + k') + 1 = 4k'' + 1$

۳)  $x^2 + y^2 = 4k + 1 + 4k' + 1 = 4(k + k') + 2 = 4k'' + 2$

مشاهده می‌شود که عبارت گزینه‌ی ۲ به هیچ کدام از سه صورت فوق نمی‌باشد.



۲۱. حداقل چند عدد از مجموعه  $\{2, 3, 4, \dots, 30\}$  انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد آنها مقسوم علیه مشترک غیر ۱ دارند؟

- ۹ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۱ (۳)      ۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»: می‌دانیم که در زیر مجموعه‌ی شامل اعداد اول از مجموعه‌ی داده شده یعنی  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$  هر دو عضو دلخواه نسبت به هم اول هستند ولی طبق اصل لانه کبوتری اگر حداقل یک عضو دیگر از مجموعه‌ی داده شده به این زیر مجموعه بیفزاییم با توجه به این که آن عدد مرکب است حداقل نسبت به یکی از این ۱۰ عضو غیر اول است. پس مجموعه‌ی مورد نظر حداقل ۱۱ عضو دارد.

۲۲. اگر  $r = (91, 63)$  و  $r = 91a + 63b$  و  $a + b$  کدام است؟

- ۲ (۱)      -۱ (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

$$r = (91, 63) = 7 \Rightarrow 7 = 91a + 63b$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»:

طبق قضیه بزو اگر  $(a, b) = d$  باشد، آنگاه  $d = ra + sb$  است و  $(r, s) = 1$  است.

$$\Rightarrow 7 = 7 \times 13a + 9 \times 7b \Rightarrow 1 = 13a + 9b = -26 + 27 = 1 \Rightarrow a = -2, b = 3 \Rightarrow a + b = 1$$

۲۳. بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $(16a + 2)$  و  $(16a + 18)$  به ازای مقادیر مثبت  $a$  چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\frac{16a + 18}{16a + 2} = \frac{16a + 2}{16} \Rightarrow d = 1$$

۱ یا ۲ یا ۴ یا ۸ یا ۱۶

تعداد مقسوم علیه‌ها ۵ است.

۲۴. از احکام زیر کدام نادرست است؟

- (۱) اگر  $c = [a, b]$  و  $m$  مضرب مشترکی برای  $a$  و  $b$  باشد، آنگاه  $c | m$  (۲) برای هر دو عدد غیر صفر  $a$  و  $b$  داریم،  $[a, b](a, b) = |ab|$  (۳) اگر  $c | a$ ،  $c | b$  و  $(a, b) = 1$ ، آنگاه  $c | ab$  (۴) اگر  $(a, b) = 1$  و  $(a, c) = 1$ ، آنگاه  $(a, bc) = 1$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»: گزینه‌ی (۱) درست است، زیرا اگر  $[a, b] = c$  باشد آنگاه  $a | c$ ،  $b | c$  است، لذا مضرب مشترک آنها یعنی  $m$  بر عدد  $c$  قابل قسمت است، زیرا  $c$  کوچکترین مضرب مشترک است. یعنی  $c | m$

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

گزینه‌ی (۲) نیز درست است، زیرا  $[a, b] \times d = |ab|$

گزینه‌ی (۴) نیز درست است، زیرا اگر  $(a, b) = 1$  و  $(a, c) = 1$  باشد آنگاه  $a$  و  $bc$  نسبت به هم اولند.

۲۵. چند زوج عدد طبیعی وجود دارد که بین کوچکترین مضرب مشترک و خود دو عدد رابطه‌ی  $M=a+b$  برقرار باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \end{cases}, (a', b') = 1, M = a + b \Rightarrow a'b'd = a'd + b'd \Rightarrow a'b' = a' + b' \\ M = a'b'd$$

چون  $(a', b') = 1$  است پس باید  $b' = 2$  و  $a' = 2$  باشد که غیر قابل قبول است پس وجود ندارد.

۲۶. تعداد اعداد دو رقمی که نسبت به ۶ اول باشند، برابر است با:

- (۱) ۴۵ (۲) ۳۳ (۳) ۳۰ (۴) ۲۷

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

اعدادی نسبت به ۶ اول هستند که مضرب ۲ و ۳ و ۶ نباشند. در ضمن تعداد اعداد دو رقمی ۹۰ می‌باشد.

$$\frac{90}{2} = 45 \quad \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۲}$$

$$\frac{90}{3} = 30 \quad \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۳}$$

$$\frac{90}{6} = 15 \quad \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۶}$$

$$m(A \cup B) = m(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 45 + 30 - 15 = 60 \quad \text{تعداد اعداد مضرب ۲ یا ۳ یا ۶}$$

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

$$90 - 60 = 30 \quad \text{تعداد اعدادی که نسبت به ۶ اولند.}$$

۲۷. تعداد اعداد اول کوچکتر از ۵۰۰ .....

- (۱) ۲۵۰ است. (۲) بیش‌تر از ۲۵۰ است. (۳) بین ۲۵۰ و ۳۰۰ است. (۴) کم‌تر از ۲۵۰ است.

پاسخ: گزینه‌ی «۴»: اعدادی که از ۵۰۰ کوچکترند یعنی از ۱ تا ۵۰۰ چون نصف آنها زوج هستند و تعداد مضرب ۳ هستند، بنابراین اعداد اول آن از نصف کمتر است، یعنی از ۲۵۰ کمتر است.



۲۸. کدام دو عدد در هم نهشتی (پیمانه ۱۲)  $a \equiv b$  صادق اند؟

۲۴ و ۵۹ (۴)

۵۹ و ۲۳ (۳)

۱۲ و ۲۳ (۲)

۶۳ و ۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»: بنا به تعریف هم نهشتی دو عدد به پیمانه‌ی ۱۲ هم نهشت‌اند، اگر و تنها اگر تفاضل آنها مضرب از ۱۲ باشد و در نتیجه:

$$63 - 20 = 43 \neq 12k$$

$$23 - 12 = 11 \neq 12k$$

$$59 - 23 = 36 = 12k \quad \text{درست}$$

$$59 - 24 = 35 \neq 12k$$

۲۹. عدد  $(a+b)^n - a^n - b^n$  که در آن  $a$  و  $b$  نسبت به هم اولند، بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

$ab$  (۴)

$a$  (۳)

$b$  (۲)

$a+b$  (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»: با توجه به فرمول:  $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab} \Rightarrow (a+b)^n - a^n - b^n \equiv 0 \pmod{ab}$ .

۳۰. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $3^{2m+2} - 3^{m+1}$  بر ۷ کدام است؟

۰ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»: برای حل این تست‌ها به جای  $m$  کوچکترین مقدار را قرار می‌دهیم. اگر  $m=1$  آنگاه:

$$3^4 - 3^2 \equiv ?$$

$$81 - 9 = 72 \equiv 0$$

۳۱. اگر (پیمانه ۵)  $n \equiv 1$  آنگاه باقی‌مانده‌ی  $n^2 - 79n + 1601$  بر ۵ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»: با توجه به فرض تست  $n \equiv 1 \pmod{5}$  می‌باشد و بنا به ویژگی‌های هم نهشتی داریم:

$$n^2 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{(رابطه‌ی ۱)}$$

$$-79n \equiv -79 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{(رابطه‌ی ۲)}$$

$$1601 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{(رابطه‌ی ۳)}$$

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

$$n^2 - 79n + 1601 \equiv 3 \pmod{5}$$

و با جمع طرفین سه رابطه‌ی به دست آمده داریم:

۳۲. اگر عدد صحیح  $a$  بر  $7$  بخش پذیر نباشد،  $a^6$  به کدام صورت نوشته می شود؟

- (۱)  $7k$  (۲)  $7k+1$  (۳)  $7k-1$  (۴)  $7k+2$

پاسخ: گزینه ی «۲»

چون  $a$  بر  $7$  بخش پذیر نمی باشد  $(a, 7) = 1$  طبق قضیه ی فرما:

$$a^{7-1} \equiv 1 \Rightarrow a^6 \equiv 1 \Rightarrow a^6 = 7k+1$$

۳۳. رقم یکان عدد  $(729)^{729} + (729)^{728} + \dots + (729)^1$  چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴) ۹

پاسخ: گزینه ی «۴»

نکته: اگر عددی که به ۹ ختم می شود به توان عدد زوج برسد به یک و اگر به توان عدد فرد برسد به ۹ ختم می شود.

پس:  $(729)^{729} + (729)^{728} + \dots + (729)^1 \equiv 9+1+\dots+9$

در سمت راست هم نهشتی بالا تعداد اعداد ۹ و تعداد اعداد یک برابرند به استثنای این که آخرین عدد ۹ با هیچ عدد یک جمع نمی شود. پس مجموع  $9+1+\dots+9$  به ۹ ختم می شود.

۳۴. دو رقم سمت راست عدد  $3!+6!+9!+\dots+300!$  کدام است؟

- (۱) ۰۶ (۲) ۸۶ (۳) ۴۶ (۴) ۶۶

پاسخ: گزینه ی «۱»

چون دو رقم سمت راست را می خواهیم باقیمانده را بر ۱۰۰ تعیین می کنیم و می دانیم که عدد  $N!$  وقتی  $N \geq 10$  باشد دو رقم سمت راست آن صفر است پس فقط تا  $9!$  را بررسی می کنیم.

$$3!+6!+9! \equiv 6+120 \times 6+6!(7 \times 8 \times 9) \equiv 6+20 \times 6+20 \times 6(56 \times 9)$$

$$\equiv 6+120+120(504) \equiv 6+20+20(04) \equiv 26+80 \equiv 106 \equiv 6$$

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

۳۵. از رابطه‌ی هم نهشتی (پیمانه ۸۴)  $36a \equiv 192$  کدام نتیجه گیری در پیمانه‌ی ۷ نادرست است؟

- (۱)  $a \equiv 3$  (۲)  $a \equiv 4$  (۳)  $2a \equiv -1$  (۴)  $3a \equiv 2$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

نکته:  $ac \equiv bc, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b, a \equiv b \Rightarrow a.c \equiv b.c$

$$36a \equiv 192 \Rightarrow 3a \equiv \frac{192}{12} \Rightarrow 3a \equiv 16 \Rightarrow 3a \equiv 16 \Rightarrow 3a \equiv 16 \Rightarrow 3a \equiv 2$$

$$3a \equiv 2 \Rightarrow 3a \equiv 9 \Rightarrow a \equiv \frac{9}{3} \Rightarrow a \equiv 3$$

$$a \equiv 3 \Rightarrow 2a \equiv 6 \Rightarrow 2a \equiv -1$$

۳۶. معادله‌ی  $9x + 13y = 700$  چند زوج جواب طبیعی دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$9x + 13y = 700 \Rightarrow 13y \equiv 700 \Rightarrow 4y \equiv 7 \xrightarrow{\times 2} 8y \equiv 14 \equiv 5$$

$$\Rightarrow -y \equiv 5 \Rightarrow y \equiv 4 \Rightarrow y = 9k + 4$$

$$9x = 700 - 13(9k + 4) \Rightarrow x = 72 - 13k$$

$$\begin{cases} 1 \leq x = 72 - 13k \rightarrow 13k \leq 71 \\ 1 \leq y = 9k + 4 \rightarrow 9k \geq -3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq k \leq 5 \Rightarrow 6 \text{ زوج}$$

۳۷. عدد  $209$  به کدام دسته‌ی هم نهشتی به پیمانه‌ی ۱۲ تعلق دارد؟

- (۱)  $[-9]$  (۲)  $[7]$  (۳)  $[-7]$  (۴)  $[9]$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»: برای این که مشخص کنیم عدد  $209$  به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه‌ی ۱۲ تعلق دارد، باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۱۲ به دست می‌آوریم.

$$209 \equiv 5 \Rightarrow -209 \equiv -5$$

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

عدد ۵ در هیچکدام از گزینه‌ها نیست، اما اگر آن را با ۱۲ جمع کنیم داریم:

$$-209 \equiv -5 + 12 \Rightarrow -209 \equiv 7$$

۳۸. باقی مانده‌ی  $\sum_{n=1}^{100} n!$  بر ۱۲ کدام است؟

۹ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\sum_{n=1}^{100} n! = 1! + 2! + 3! + \dots + 100! \quad \sum_{n=1}^{100} n! \quad \text{نماد یعنی:}$$

و باقی مانده تقسیم این عدد بر ۱۲ عبارتست از:

$$1! = 1 \equiv 1 \Rightarrow 2! = 2 \equiv 2 \Rightarrow 3! = 6 \equiv 6 \Rightarrow 4! = 24 \equiv 0 \Rightarrow 5! = 120 \equiv 0, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{100} n! \equiv 1 + 2 + 6 = 9$$

و باقی مانده تقسیم بقیه جملات تا  $100!$  بر ۱۲ نیز برابر صفر است. پس:

۳۹. اگر دو زوج مرتب  $(a, b), (c, d)$  برابر باشند، داریم:

$$ac = bd \quad (۴)$$

$$ac + bd = 0 \quad (۳)$$

$$ad = bc \quad (۲)$$

$$ad + bc = 0 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

با ضرب طرفین این دوتساوی در یکدیگر، داریم  $ab = cd$  حال اگر تساوی فوق را به صورت زیر بنویسیم داریم:

$$\begin{cases} a = c \\ d = b \end{cases} \Rightarrow ad = bc$$

۴۰.  $R$  یک رابطه است و  $R = R^{-1}$  کدام درست است؟

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

(۲) دارای خاصیت تعدی است.

(۱) دارای خاصیت پاد تقارنی است.

(۴)  $R$  دارای خاصیت بازتابی است.

(۳)  $R$  دارای خاصیت تقارن است.

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

اگر رابطه‌ای با معکوس خود برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که اگر  $(x, y)$  در  $R$  باشد  $(y, x)$  نیز در  $R$  خواهد بود پس رابطه خاصیت تقارنی دارد.

۴۱. کدام دو مجموعه یک افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح می‌باشند؟

(۱) مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج و مجموعه‌ی اعداد صحیح فرد

(۲) مجموعه‌ی حاصل از مضارب صحیح اعداد اول و مجموعه‌ی اعداد فرد

(۳) مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی حاصل از قرینه‌ی اعداد طبیعی

(۴) مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ و مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵

پاسخ: گزینه‌ی «۱»: مجموعه  $A$  در صورتی به زیر مجموعه‌های  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  افراز می‌شود که این زیر مجموعه‌ها سه خاصیت زیر را داشته باشند.

(۱) تمامی زیر مجموعه‌ها مخالف تهی باشند.  $\forall_i A_i \neq \emptyset$

(۲) اشتراک دو به دوی آن‌ها تهی باشند.  $\forall_{i,j} A_i \cap A_j = \emptyset$

(۳) اجتماع تمامی زیر مجموعه‌ها، مجموعه‌ی  $A$  را تشکیل دهد.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$  بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۴۲. رابطه  $\sin y = \sin x$

(۱) انعکاسی، متعدی و تقارنی است. (۲) انعکاسی است و تقارنی و متعدی نیست.

(۳) انعکاسی و تقارنی است و متعدی نیست. (۴) انعکاسی و متعدی است و تقارنی نیست.

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

رابطه، خاصیت انعکاسی دارد  $xRx \Rightarrow \sin x = \sin x \Rightarrow$

رابطه، خاصیت تقارنی دارد  $xRy \Rightarrow \sin x = \sin y \Rightarrow \sin y = \sin x \Rightarrow yRx \Rightarrow$

رابطه، خاصیت تعدی دارد.  $\left. \begin{matrix} xRy \Rightarrow \sin x = \sin y \\ yRz \Rightarrow \sin y = \sin z \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sin x = \sin z \Rightarrow xRz \Rightarrow$

۴۳. نمایش ماتریسی یک رابطه به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  می‌باشد این رابطه:

(۱) پاد متقارن نیست - متعدی نیست. (۲) پاد متقارن هست - متعدی نیست.

(۳) پاد متقارن و متعدی است. (۴) پاد متقارن نیست و متعدی هست.

پاسخ: گزینه‌ی «۲»: اگر حروف  $a, b, c, d$  را در ردیف و ستون ماتریس بنویسیم رابطه مربوط به آن ماتریس به صورت زیر است:

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d)\}$$

ملاحظه می‌شود که پاد متقارن است. ولی متعدی نیست زیرا  $(a, b)$  و  $(b, d)$  وجود دارد. در حالی که  $(a, d)$  وجود ندارد.

۴۴. اگر  $\binom{n}{\lambda} = 2 \binom{n}{\gamma}$  آنگاه  $n$  کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\binom{n}{\lambda} = 2 \times \binom{n}{\gamma} \Rightarrow \frac{n!}{\lambda!(n-\lambda)!} = 2 \times \frac{n!}{\gamma!(n-\gamma)!} \Rightarrow n = 23$$

۴۵. معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n - r$  چند جواب غیرمنفی دارد؟

$$\binom{n-1}{r-1} \quad (۴)$$

$$\binom{n+1}{r} \quad (۳)$$

$$\binom{n}{r} \quad (۲)$$

$$\binom{n}{r-1} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

[www.nashr-estekhdam.ir](http://www.nashr-estekhdam.ir)

تعداد حالت‌ها برابر است با :

$$\binom{(n-r)+r-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1}$$